**ESERCIZI LIMITI DI SUCCESSIONI**

1. Verificare che la successione  è limitata e dotata di minimo e massimo.
2. Dire se le seguenti successioni sono limitate (*n* intero e maggiore o uguale a 1):

a) ; b) ; c) ; d) ; e) 

1. Verificare che le disuguaglianze seguenti sono definitivamente soddisfatte:

a) ; b) .

1. Verificare che per tutti i termini della successione appartengono a (0,1).
2. Determinare per quale valore di α la successione è definitivamente uguale a 2.
3. Calcolare il seguente limite di successione:



1. Dimostrare, applicando la definizione di limite, che:

a) ;

b) 

c) .

1. Si dimostri che se una successione di numeri positivi è tale che , allora  e viceversa.
2. Un’urna contiene inizialmente palline rosse e bianche. Vengono aggiunte successivamente palline rosse e si indica con e  la probabilità di estrarre rispettivamente una pallina rossa o una pallina bianca dopo aver aggiunto *n* palline rosse. Si studi il comportamento delle due successioni. E se aggiungessimo due palline rosse e una bianca ogni volta?
3. Calcolare il seguente limite: .
4. Consideriamo il fascio di circonferenze  e siano  i punti di ordinata negativa dati dall’intersezione della tangente a  nel punto di coordinate  con .

* Si determini l’equazione della curva a cui appartengono tutti i ;
* esprimere l’ordinata  del punto  in funzione dell’ascissa di ;
* esprimere il termine generale della successione ;
* calcolare il .

1. Data la successione  si determinino due numeri reali *r* e *s*  in modo tale che risulti . Si trovi inoltre un’espressione per la somma , e si calcoli il .
2. Una successione ha la proprietà che per ogni valore dell’indice *n*. Si calcoli, se esiste, il .
3. Indicata con la *successione di Fibonacci* , si dimostri che .
4. Data la parabola di equazione , sia , con *n* intero naturale, un fascio di rette che la intersecano nei punti  diversi dall’origine.

* Si determinino in funzione di *n* le aree dei triangoli ;
* Si calcoli il .

1. Un parallelepipedo rettangolo ha dimensioni *a, b, c* rispetto ad una determinata unità di misura. Si operano successive modifiche al parallelepipedo: ogni volta il lato *a* viene dimezzato, mentre i lati *b e c* vengono aumentati di 10 unità. Se è il volume iniziale e quello ottenuto dopo *n* modifiche:

* a) Si calcoli il ;
* b) Si calcoli il .

1. In un’azienda, se un certo dipendente è presente al lavoro, la probabilità che il giorno successivo sia presente è ½, mentre se è assente la probabilità che il giorno successivo sia presente è ¾. Nell’ipotesi che il primo giorno (giorno “0”) sia presente, indicata con  la probabilità che sia presente il giorno *n*-esimo, si studi il comportamento della successione .
2. Calcolare i seguenti limiti di successioni. 
3. Si scriva in forma compatta la somma1+11+111+1.111+11.111. (*suggerimento:111=1+10+100…).*
4. Calcolare il valore della seguente somma parziale: .
5. Dopo aver dimostrato che la lunghezza del lato del poligono regolare di  lati è legata a quella del poligono di  lati, inscritto nella medesima circonferenza di raggio unitario, dalla relazione , si calcoli il . (*Suggerimento: il perimetro del poligono regolare di*  *al crescere del numero dei lati tende alla misura della circonferenza...)*
6. Una pallina viene lasciata cadere dalla quota di un metro. Ad ogni impatto col suolo dissipa una quantità di energia che la fa rimbalzare ad una quota pari a  di quella precedente. Si calcoli la distanza complessiva percorsa dalla pallina quando avrà terminato di rimbalzare.
7. Si calcoli il  evidenziando i passaggi che permettono di applicare i teoremi noti e/o i limiti notevoli.
8. Calcolare i seguenti limiti di successioni: .
9. Una pallina cade da un’altezza *h* su di un piano orizzontale e rimbalza fino a raggiungere un’altezza **, dove  ed è indipendente da *h*. Supponiamo che la pallina compia “infiniti” rimbalzi raggiungendo ogni volta una quota pari al prodotto di *q* per la quota precedente. La pallina finirà di rimbalzare in un tempo finito?
10. Un quadrato unitario è suddiviso in 9 quadrati uguali e il quadrato centrale viene colorato (il mio colore preferito è il verde, fate voi). I rimanenti 8 quadrati sono similmente divisi (ognuno, cioè, viene a sua volta diviso in 9 quadrati) e viene colorato il quadrato centrale di ciascuno di essi. Il procedimento viene iterato infinite volte. Calcolare l’area complessiva della superficie colorata.
11. Dimostrare che una successione convergente è limitata.
12. All’interno del quadrato di lato 1 è inscritta una circonferenza, all’interno della quale è inscritto un quadrato, all’interno del quale è inscritta una circonferenza, e così via. Si trovi il termine generico della successione delle misure dei lati dei quadrati così ottenuti. Indicata con  la differenza tra l’area del quadrato e quella della circonferenza inscritta, sia , con . Si calcoli il  .
13. Calcolare i seguenti limiti di successioni: .
14. Verificare con la definizione il seguente limite infinito: .
15. Dimostrare che, se  è *definitivamente* maggiore di , e se , allora .
16. Una successione che tende a più infinito non è limitata superiormente. E’ vero il viceversa, cioè che se una successione non è limitata superiormente, allora tende a più infinito?
17. Calcolare i seguenti limiti di successioni:

a) 

b) 

1. Si verifichino con la definizione i seguenti limiti di successioni: .
2. Dimostrare che la successione definita per ricorrenza: non ha limite.
3. E’ data la famiglia di parabole . Dopo aver tracciato sullo stesso piano cartesiano i grafici corrispondenti ai valori :
4. Si scriva l’equazione della retta , tangente al grafico della parabola corrispondente nel punto di coordinate .
5. Si determini l’equazione del luogo geometrico dei punti a cui appartengono i vertici della parabola.
6. Si indichi con il punto di intersezione della retta  con la parabola , con il punto di coordinate , e con la proiezione di  sull’asse delle ascisse. Si calcoli il rapporto tra l’area del triangolo , e quella del triangolo .
7. Si calcoli il .
8. E’ Data la famiglia di parabole . Dopo aver tracciato sullo stesso piano cartesiano i grafici corrispondenti ai valori :
9. Per , Si determinino i punti  in cui la retta , tangente al grafico della parabola  nel vertice , incontra la parabola .
10. Si trovi il punto  intersezione delle tangenti alla parabola , condotte dai punti .
11. Si calcoli l’area del triangolo , e l’area del triangolo.
12. Si calcoli il .

38. In un sistema di riferimento cartesiano , è data la famiglia di parabole di equazione .

1. Si determini l’equazione della retta tangente *t* alla parabola della famiglia nel punto di coordinate (0,0), e si indichi con A l’altro punto in cui la generica parabola della famiglia incontra l’asse *x*.
2. Si determini il punto H, intersezione della parallela *s* a *t* condotta da A, con la perpendicolare *p* a *t* condotta da O. Detta  l’area del triangolo OAH, calcolare il .

39. In un sistema di riferimento cartesiano , sono date la famiglia di parabole di equazione , e la famiglia di iperboli .

1. Si determinino i punti d’intersezione tra le curve rappresentanti delle due famiglie.
2. Si traccino i grafici delle parabole e delle iperboli corrispondenti ai valori  e .
3. Si dimostri che, al variare di , le rette per  e  intersecano l’asse delle ascisse nello stesso punto, .
4. Si determini l’area del triangolo , e si calcoli il .

**Soluzioni**

1. Limitata: .
2. .
3. .
4. *Si dimostra che la successione è a termini positivi ed è decrescente*.
5. .
6. 1.

9., .

10. 4.

11. ; ; ; ; 0.

12. ; .

13. *Scrivere le prime n diseguaglianze e sommare membro a membro*.

14. .

15. .

16.  .

17. .

18. .

19. .

20. .

21. .

22. .

23. .

24. 

25. Utilizziamo la legge oraria del moto uniformemente accelerato  per calcolare il “tempo di volo” relativo ad ogni rimbalzo. La pallina impiega inizialmente un tempo  per giungere a terra. A questo punto rimbalza (urto perfettamente elastico…) , raggiunge la quota *qh* e ricade di nuovo a terra in un tempo . Rimbalza nuovamente e raggiunge la nuova quota *q(qh)* e ritorna a terra in un tempo . Iterando il procedimento si ha che il tempo tra un rimbalzo ed il successivo è . Il tempo complessivo sarà quindi .

Conclusione: pur effettuando infiniti rimbalzi la pallina cessa di rimbalzare dopo un tempo finito.

26. Innanzitutto, indichiamo con  l’area colorata al passo *n*-esimo:

, , , in generale .

1. Sia . Posto, ad esempio, , esiste in corrispondenza un  tale che  per ogni . Quindi . C.v.d.

28. ;

29. 

30. 

31.  è *definitivamente* maggiore di : , inoltre :. Quindi, se 

32. No. Ad esempio, la successione  non è limitata superiormente, tuttavia non esiste il limite per *n* tendente a infinito.

33. a) 

34. 

35. Scriviamo alcuni termini della successione:  Dall’esame dei primi 4 termini si evince un carattere di *periodicità* della successione: per esempio i termini di indice 3*n* sono tutti uguali a due. Dimostriamo questa affermazione con il principio di induzione: . Di conseguenza infiniti termini sono uguali a due e, con procedimento analogo, si dimostra che infiniti termini sono uguali a -1 e a ½. Non è quindi possibile che infiniti termini della successione, tranne al più un numero finito, si possano “addensare” arbitrariamente vicino ad uno qualsiasi dei tre valori della successione.

36. a) ; b) ; c) ; d) .

37. a)b)

c), , d) .

38. . 



Descrizione: uy

39. a)c) ; d)